3. Teorema de Pitágoras

1. **Propiedades de los triángulos rectángulos**
2. **Rompecabezas sobre el teorema de Pitágoras**
3. **Aplicaciones del teorema de Pitágoras: cálculo de distancias**

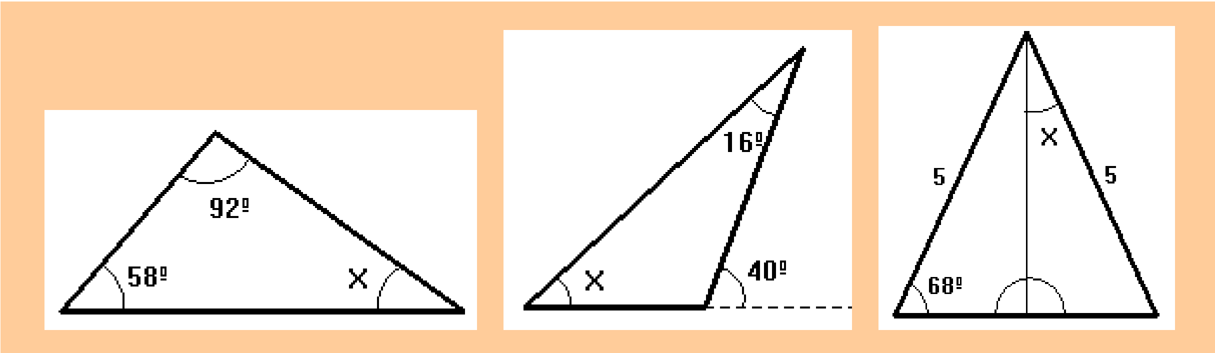
1. Propiedades de los triángulos rectángulos

- **<u>TRIÁNGULOS</u>**

1) Indica si es posible que los ángulos de un triángulo midan: a) 35º, 83º y 54º; b) 30º, 80º y 75º; c) 32º, 77º y 71º.

2) Indica si es posible que los lados de un triángulo midan: a) 4 cm, 7 cm y 5 cm; b) 2 cm, 5 cm y 8 cm; c) 5 cm, 5 cm y 1 cm; d) 1 cm, 1cm y 5 cm.

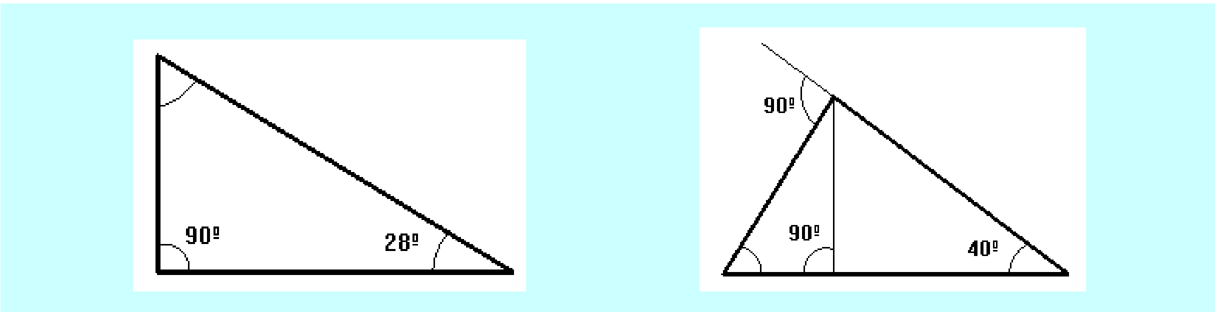
3) Determina la medida del ángulo x en los triángulos de la siguiente figura:



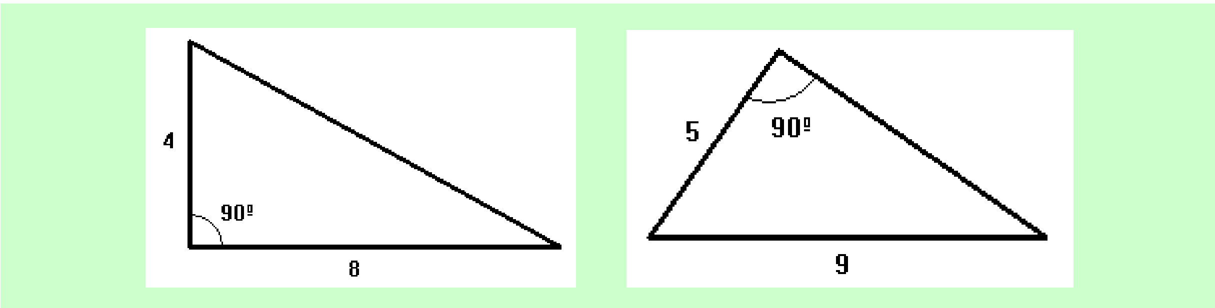
Recuerda:	*1) La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180º*
	2) Un lado de un triángulo debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

- **<u>TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS</u>**

1) Halla los ángulos desconocidos de los triángulos rectángulos de la siguiente figura:



2) Con ayuda de material apropiado (regla, compás, escuadra, cartabón), dibuja los siguientes triángulos y, midiendo con una regla graduada, halla los lados desconocidos:



3) Dibuja los siguientes triángulos con regla y compás. ¿Cuáles de ellos son triángulos rectángulos?.

a) a = 5, b = 4, c = 6 b) a = 0’5, b = 1’2, c = 1’3 c) a = 1, b = 2, c = 3.

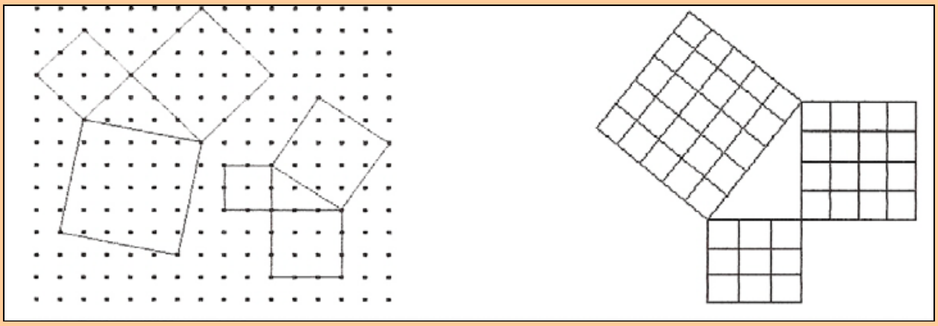
Un triángulo rectángulo es aquél que tiene un ángulo recto (es decir, de 90º).

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, es decir, su suma vale 90º.

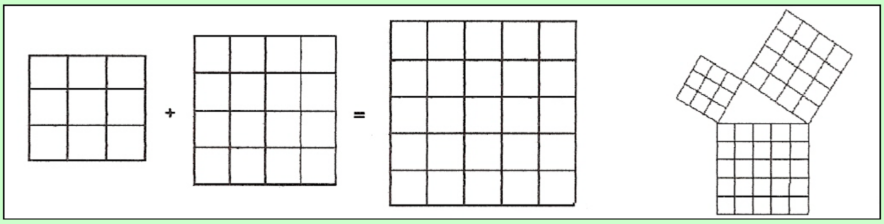
Los lados menores de un triángulo rectángulo son perpendiculares entre sí y se llaman catetos. El lado mayor de un triángulo rectángulo, que se opone al ángulo recto, se llama hipotenusa.

- **TRAMAS DE PUNTOS**

En cada una de las figuras que siguen haya el área de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo. Compara dichas áreas. ¿Observas algo interesante?.



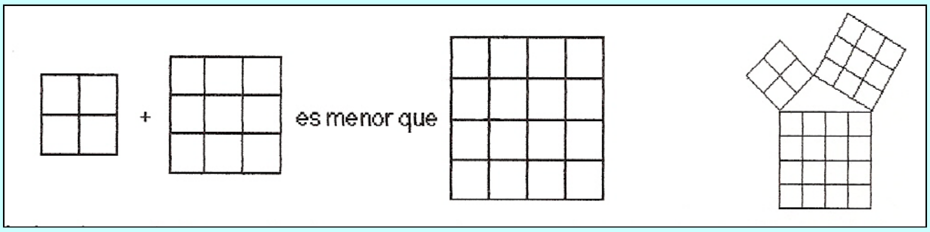
El triángulo ABC es rectángulo y en él se cumple que:



Es decir: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores es igual al área del cuadrado construido sobre el lado mayor.

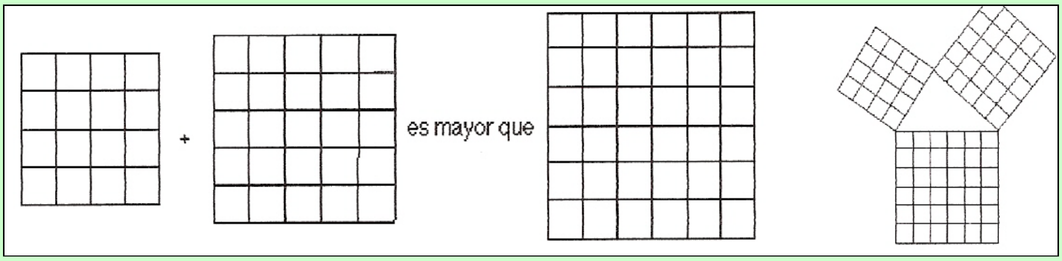
Esto no ocurre en los triángulos que no son rectángulos.

Este otro triángulo es obtusángulo.



La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños es menor que el área del cuadrado construido sobre el lado mayor.

Este triángulo es acutángulo.



La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños es mayor que el área del cuadrado construido sobre el lado mayor.

1) Para averiguar si el triángulo de lados 7 cm, 8 cm y 10 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo sin necesidad de construirlo, procede del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} 7^2+8^2=49+64=113 \\ 10^2=100 \end{array}\right\}$$ Compara y decide. Después, constrúyelo y comprueba.

2) Averigua si el triángulo de lados 5, 12 y 13 es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

3) Haz lo mismo con el triángulo de lados 6, 8 y 11.

2. Rompecabezas sobre el Teorema de Pitágoras

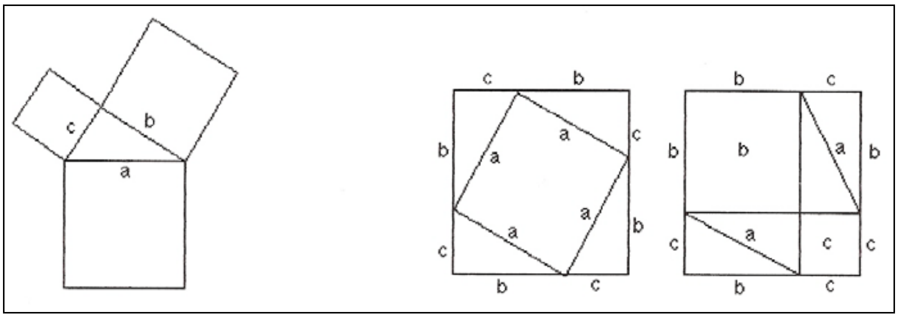
- <u>**PUZZLES SOBRE PITÁGORAS**</u>

En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman catetos. El lado mayor se llama hipotenusa y se opone al ángulo recto. En la figura, b y c son los catetos, a es la hipotenusa. El teorema de Pitágoras dice:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

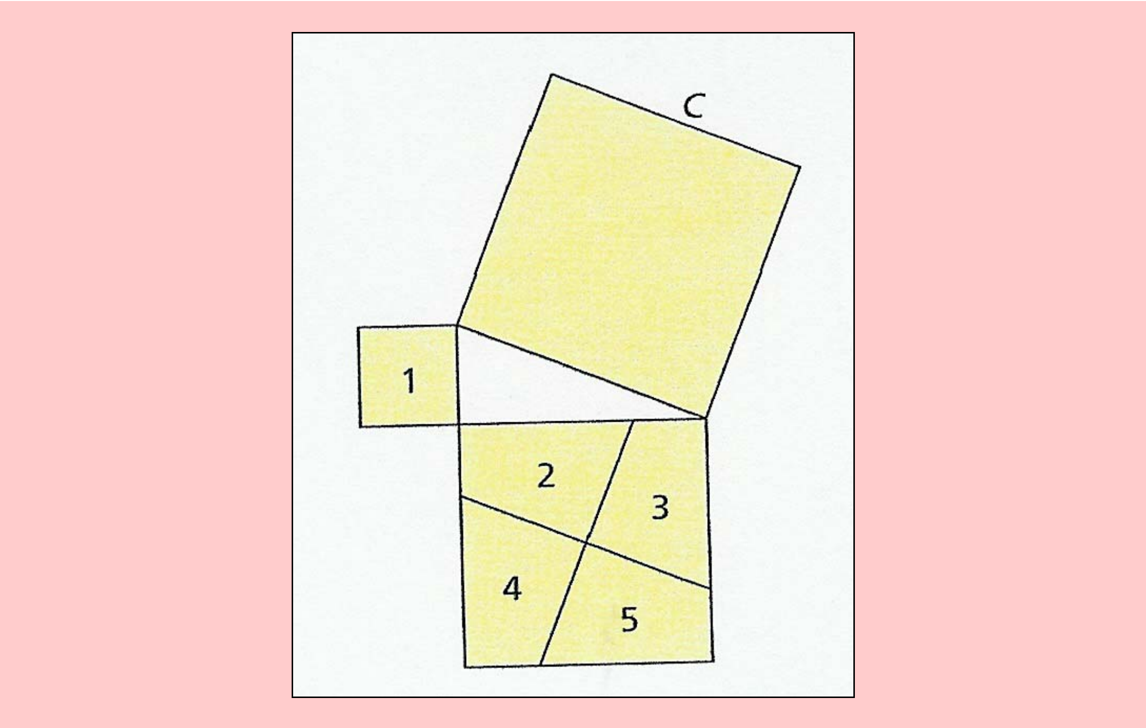
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Y esto es verdad solamente si el triángulo es rectángulo.

Para ver que es cierto que ocurre esto siempre que el triángulo sea rectángulo, observa el siguiente puzzle:



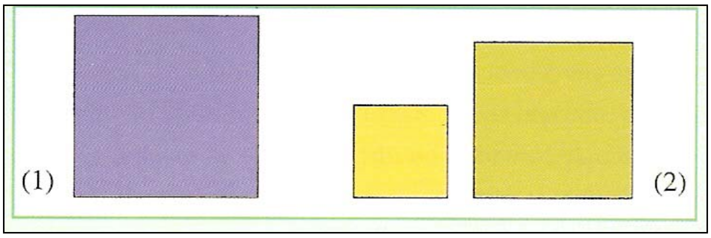
Observa que los dos cuadrados grandes son iguales. Si a cada uno de ellos le suprimimos cuatro triángulos iguales, de lados a, b y c, queda: a^2 *en el primero y* $b^2 + c^2$ *en el segundo. Por lo tanto, debe cumplirse que:* $a^2 = b^2 + c^2$ *.*

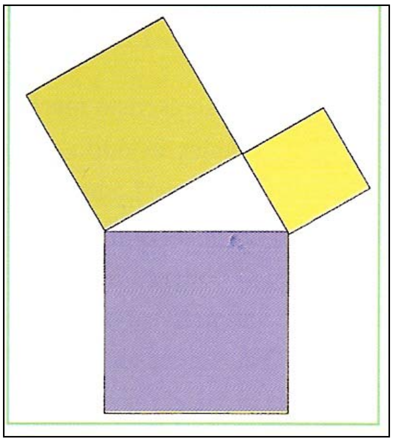
a) En la siguiente figura se encierra, a modo de tangram, una demostración del teorema de Pitágoras. Se trata de que construyas el cuadrado grande utilizando para ello las cinco piezas marcadas con 1, 2, 3, 4 y 5 de forma que puedas comprobar el teorema de Pitágoras.



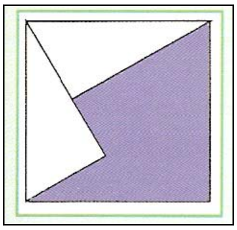
b) Dibuja en una cartulina y recorta después, las siguientes piezas: 1) Cuatro triángulos rectángulos iguales y cuyos catetos midan 6 y 8 cm. 2) Un cuadrado de 2 cm de lado. Cuando tengas las cinco piezas, demuestra el teorema de Pitágoras.

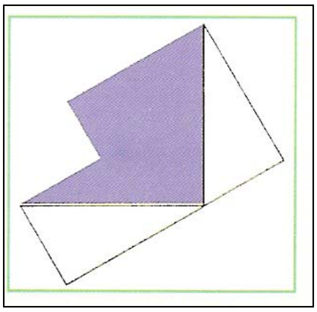
c) Partimos de un triángulo rectángulo y los cuadrados construidos sobre sus lados. Recorta tres piezas iguales que los cuadrados de la figura y colocalos como indica la fgura de la derecha.





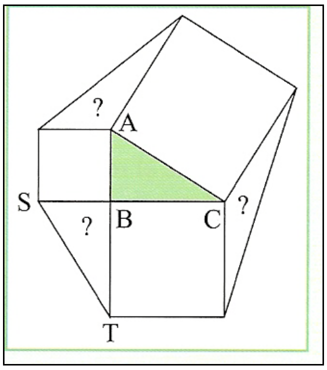
Del cuadrado mayor recorta dos triángulos iguales que el de partida, como muestra la figura de la izquierda. Coloca los dos triángulos recortados haciendo coincidir la hipotenusa de éstos con los lados del cuadrado que quedan intactos.





Compara la figura obtenida con la figura (2). Observa que son iguales, luego podemos concluir que "el cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo coincide con la suma de los cuadrados sobre los catetos". Has demostrado así el teorema de Pitágoras.

d) Dibuja los tres cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo y une los vértices de dichos cuadrados. Se forman tres nuevos triángulos. Calcula las áreas de cada uno de ellos y compáralas con la del triángulo rectángulo de partida. ¿Cómo son?



3. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras: cálculo de distancias.

- **<u>APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS</u>**

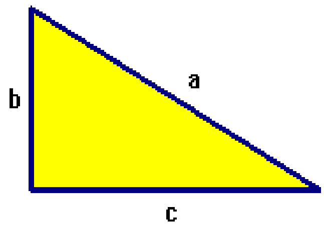
1) *De un triángulo sabemos que es rectángulo y conocemos los dos catetos. Entonces podemos calcular la hipotenusa:*

   $a^2 = b^2 + c^2$ *Conociendo* a^2*, se puede calcular a, a que* $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

2) *De un triángulo sabemos que es rectángulo y conocemos la hipotenusa y un cateto. Entonces, podemos calcular el otro cateto:*

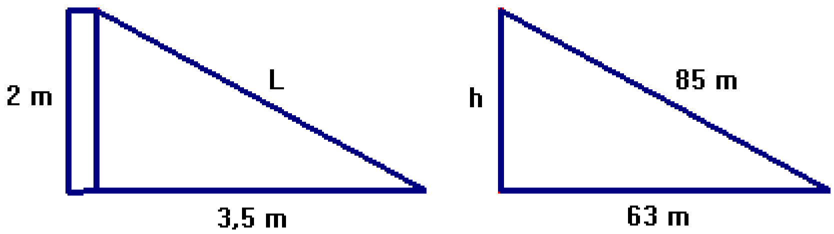
   $a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - c^2$

   Conociendo c^2 *se puede hallar c, ya que* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$



3) *Si de un triángulo conocemos los lados, pero ignoramos si es o no rectángulo, podemos averiguarlo. Para ello, comprobaremos si el cuadrado del lado mayor es o no igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.*

a) Para sostener un poste de 2 m de alto lo sujetamos con una cuerda situada a 3'5 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud, l, de la cuerda?.

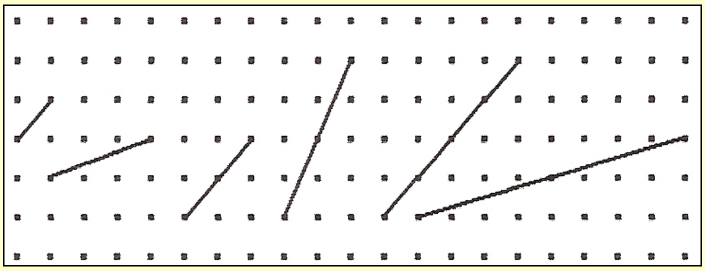


b) La cuerda de una cometa mide 85 m. Ésta se encuentra volando sobre una caseta que está a 63 m de Lucía. ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra la cometa?.

c) ¿Son rectángulos los triángulos de lados: a) 17, 11, 20; b) 10, 24, 26?.

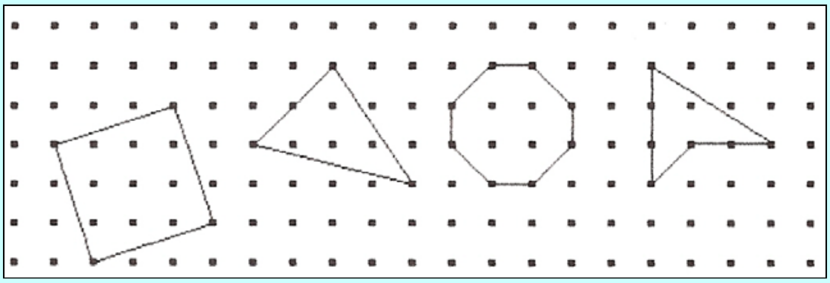
- **<u>SEGMENTOS EN UNA TRAMA</u>**

Halla la longitud de cada uno de los segmentos dibujados en esta trama cuadrada de puntos:



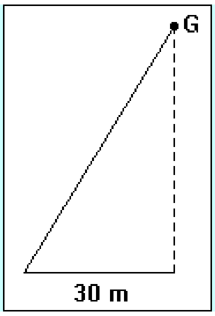
- **<u>PERÍMETROS</u>**

Calcula el perímetro de los polígonos dibujados en la siguiente trama cuadrada de puntos:



- **<u>UN GLOBO</u>**

Un globo cautivo está sujeto al suelo con una cuerda. Ayer, que no había viento, el globo estaba a 50 m de altura. Hoy hace viento, y la vertical del globo se ha alejado 30 m del punto de amarre. ¿A qué altura está hoy el globo?.



- **DOS BARCOS**

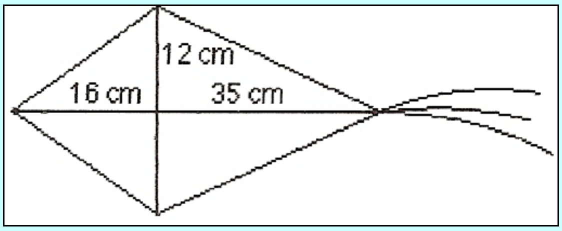
Dos barcos se cruzan en el mar. Uno va hacia el Norte a la velocidad de 45 km/h, y el otro va hacia el Este a la velocidad de 55 km/h. ¿A qué distancia estará uno del otro, 2 horas y 10 minutos después de encontrarse?.

- **ESCALERA**

Una escalera de 3 metros de longitud se apoya sobre una pared, estando su pie a una distancia de 1 metro de la pared. ¿A qué altura de la pared llega?.

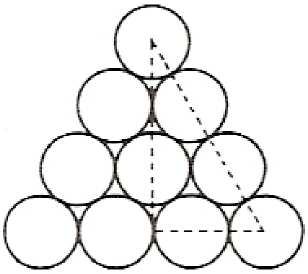
- **COMETA**

Para fabricarte una cometa de las dimensiones indicadas en la siguiente figura, ¿qué medidas le darías al soporte exterior?. ¿Tendrás suficiente con un listón de 2 metros para construir toda la estructura?.



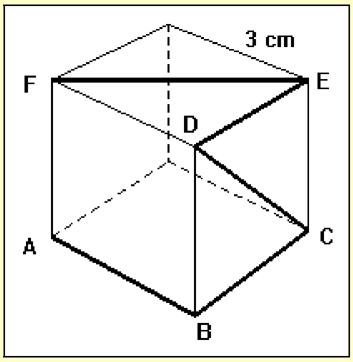
- **TONELES**

¿Qué altura ha de tener un almacén para poder colocar toneles de aceite, tal como se indica en la figura, si el diámetro de cada tonel es de dos metros?



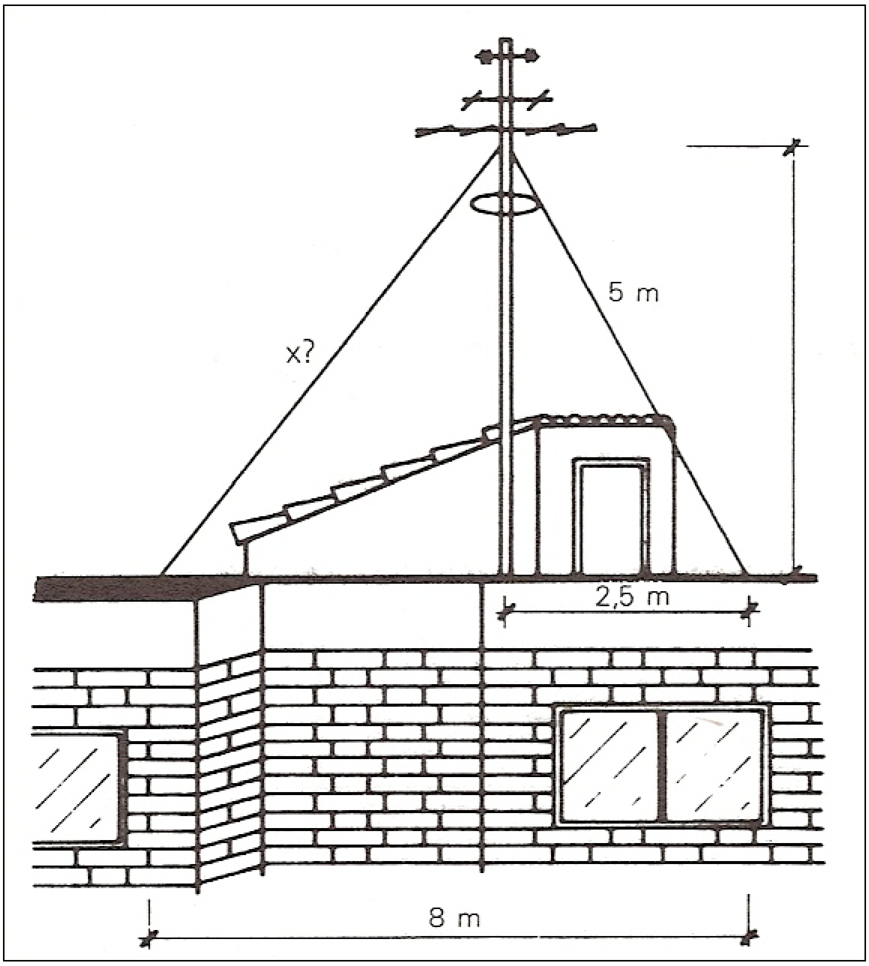
- **PASEO DE UNA HORMIGA**

Calcula la longitud del recorrido ABCDEF realizado por la hormiga.



- **ANTENA DE TV**

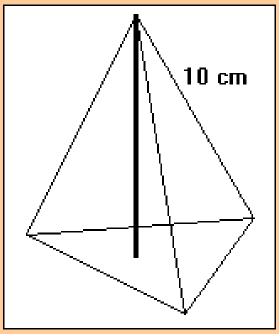
Una comunidad de propietarios ha observado que uno de los dos cables que fijan su antena colectiva de TV se ha roto. Haciendo uso de los puntos de amarre ya existentes, se les plantea el problema de averiguar la longitud del cable que se ha de reponer; conociendo los datos restantes según aparecen ene l esquema adjunto, ¿podrías resolverles su problema?

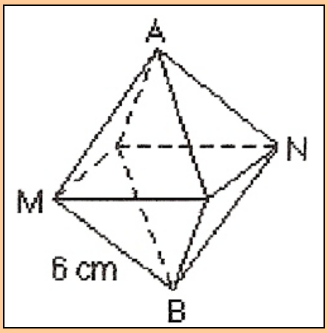


- **TETRAEDRO Y OCTAEDRO**

a) Calcula la altura de un tetraedro de 10 cm de arista.

b) Calcula la distancia entre los vértices A y B del octaedro de la figura adjunta. Calcula también la distancia entre los vértices M y N.





4. Decimales y medidas

- **UNIDADES DE LONGITUD**

Expresa las siguientes medidas en las unidades que se indican:

a) Diámetro de la Tierra = 12756’776 km, en dam.

b) Estatura de una persona = 1750 mm, en m.

c) Longitud de un DIN A4 = 0’297 m, en cm.

d) Longitud de una bacteria = 0’000005 m, en μm.

- **UNIDADES DE MASA**

Expresa las siguientes medidas de masa en las unidades que se indican:

a) Un vagón de mercancías = 25 toneladas, en g.

b) Un tomate = 150000000000 ng, en kg.

- **UNIDADES DE SUPERFICIE**

Expresa las siguientes medidas de superficie en las unidades que se indican:

a) Superficie de una habitación = 0’0012 hm2, en m2.

b) Superficie de la provincia de Soria = 1028700 ha, en km2.

c) Superficie de un DIN A4 = 62370 mm2, en dm2.

- **UNIDADES DE VOLUMEN Y DE CAPACIDAD**

Expresa las siguientes medidas en las unidades que se indican:

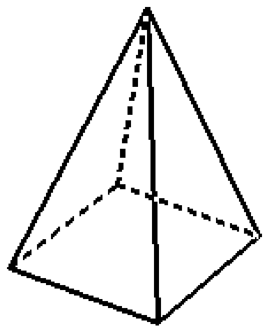
a) Volumen de sangre de un hombre = 5000 cm3 y de una mujer = 4500 cm3, en l.

b) Volumen del depósito de gasolina de un coche = 0’5 hl, en dm3.

c) Volumen de aire en los pulmones = 4760000 mm3, en l.

d) Volumen de un barril de petróleo = 0’000163654 dam3, en dm3.

e) Volumen de la pirámide de Keops = 0’0025 Km3, en m3.



- **SISTEMA ANGLOSAJÓN**

1) En el manual técnico de un coche de importación se indica que el consumo del motor es $3\frac{1}{2}$ galones cada 100 millas. Expresa dicho consumo en litros cada 100 km. (1 galón=3,78 litros; 1 milla= 1,61 km)

2) La densidad de la piedra caliza es 168 libras por pie cúbico. Expresa dicha densidad en gramos por centímetro cúbico. Ten en cuenta que DENSIDAD = MASA / VOLUMEN. (1 libra=453,6 gramos; 1 pie=30,48 cm)

3) El manómetro indica la presión de 20 libras por pulgada cuadrada. Traduce esa expresión a kilogramos por centímetro cuadrado. Tradúcela también a milímetros de mercurio y atmósferas. (1 pulgada=2,54 cm; 760 mm de mercurio = 1 atmósfera = 1033’23 g/cm^2).

1) La velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. ¿Cuál es la velocidad del sonido en km/h ?.

2) El sonido recorre 340 metros por segundo. Durante una tormenta se ha visto un rayo y 13 segundos después se escucha el trueno. ¿A cuántas millas cayó el rayo?. (1 milla = 1’61 km).

5. Números irracionales

- **NÚMEROS IRRACIONALES**

Existen otros números que no proceden de una fracción: por ejemplo, el número π, del que se han dado diferentes aproximaciones en forma de fracción:

Arquímedes (siglo III a. C.): $\frac{22}{7}$ *Ptolomeo (siglo II d. C.):* $\frac{377}{120}$ *Liu-Hui (siglo III d. C.):* $\frac{355}{113}$

Otro número de este mismo tipo es $\sqrt{2}$, que surge al comparar la diagonal de un cuadrado con su lado.

Asimismo, aparece $\sqrt{5}$, al comparar la diagonal de un pentágono regular con el lado. Más concretamente aparece el número de oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

*Todos los números que no tienen una fracción que los represente de forma exacta son los llamados **números irracionales**, en oposición a los otros números decimales que pueden expresarse en forma de fracción, a los que también se les llama **números racionales**. La expresión decimal de un número racional es un decimal exacto o periódico, mientras que la representación decimal de un número irracional tiene infinitas cifras decimales que no se repiten formando período.*

La mayoría de números irracionales aparece en problemas geométricos, pero para trabajar con ellos sólo tomaremos algunas cifras, según las necesidades.

***Ejemplo**.- Vamos a buscar valores cada vez más aproximados del número $\sqrt{2}$. Se trata de hallar un número que al elevarlo al cuadrado nos dé 2.*

Para empezar, sabemos que $1<\sqrt{2}<2$. Probamos con la calculadora cuánto vale 1’1^2, 1’2^2, 1’3^2, 1’4^2, 1’5^2 y comprobamos que: 1’4^2 = 1’96 < 2 y que 1’5^2 = 2’25 > 2. Por tanto, la $\sqrt{2}$ está comprendida entre los valores 1’4 y 1’5. Si queremos conseguir otra cifra decimal, ahora probamos con la calculadora los valores 1’41, 1’42, 1’43, etc.

Como $1'41^2 = 1'9881 < 2$ y $1'42^2 = 2'0164 > 2$, sabemos ya que $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1'41 y 1'42 y no hay que seguir probando con otras centésimas. Para conseguir más cifras decimales, ahora habría que probar con 1'411, 1'412, etc. Y así sucesivamente.

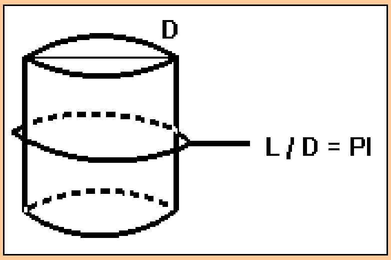
*A los números 1, 1'4, 1'41, etc, se les llama **aproximaciones por defecto** de $\sqrt{2}$, y a los números 2, 1'5, 1'42, etc, **aproximaciones por exceso** de $\sqrt{2}$.*

a) Utiliza la calculadora y procede de forma análoga para calcular aproximaciones de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ por defecto y por exceso hasta las milésimas. A partir del valor aproximado obtenido para $\sqrt{5}$ aproxima hasta las milésimas el valor del número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Calcula y compara los resultados de las siguientes sumas: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}+\sqrt{4}$ y $\sqrt{7}$. Prueba con otros números y trata de sacar conclusiones.

- **APROXIMACIONES DE PI**

El número π se ha expresado clásicamente por las fracciones $\frac{22}{7}$ (Arquímedes) y $\frac{355}{113}$ (Liu – Hui). Compara estos valores con el valor verdadero de π y di cuál es el orden del error cometido.

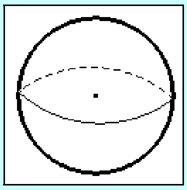


- **RAIZ DE QUINCE**

Expresa $\sqrt{15}$ por una sucesión de números decimales:

a) Por defecto. ¿Qué error máximo se comete en cada término?.

b) Por exceso. ¿Qué error máximo se comete en cada término?.



- **ECUADOR TERRESTRE**

Si para calcular el perímetro de una circunferencia del tamaño del ecuador terrestre se utiliza el valor de π aproximado como 3'14, estima el error que se cometería al no tomar el valor exacto. (El radio de la Tierra es 6378 km. La longitud de la circunferencia es $L=2\pi r$. La diferencia entre π y 3'14 es menor que 0'005).

- **RAÍCES CUADRADAS**

En tu calculadora dispones de la tecla $\sqrt{\ }$ con la que puedes hallar la raíz cuadrada de algunos números. Utilizando dicha función, averigua si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1)	$\sqrt{15}$ es un número A, tal que $A^2 = 15$.	V	F
2)	$\sqrt{15} = 3'87$.	V	F
3)	$\sqrt{15} = 3'8729833$	V	F
4)	$\sqrt{-4} = -2$.	V	F
5)	$\sqrt{-4} = \pm 2$.	V	F
6)	$\sqrt{121} = -11$.	V	F
7)	La raíz cuadrada de un número siempre es positiva.	V	F
8)	La raíz cuadrada de un número negativo no existe.	V	F
9)	Siempre hay dos raíces cuadradas de un número positivo.	V	F
10)	$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25}$.	V	F
11)	$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}$.	V	F
12)	$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$	V	F
13)	$\sqrt{25-9} = \sqrt{25} - \sqrt{9}$.	V	F
14)	$\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$	V	F

- **ESPIRAL CUADRÁTICA**

Utilizando de forma adecuada el teorema de Pitágoras, dibuja la siguiente espiral ayudándote de instrumentos de dibujo como regla y compás. Especifica con cuidado las instrucciones que hay que seguir para su construcción. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos OA, OB, OC, OD, ..., OJ?. ¿Cuántos triángulos debes construir para obtener un segmento que mida $\sqrt{15}$?.